

7. Interferencia y Desviación RMS

7.1. El principio de superposición: efectos de interferencia

CT III.E

- El primer postulado dice que los estados de un sistema se pueden construir a partir de superposiciones.
- Al combinarlo con los otros postulados obtenemos efectos de interferencia.

Diferencia entre superposiciones y mezclas estadísticas

- Considerando dos estados ortonormales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ ~~eigenestados de B con eigenvalores b_1 y b_2~~ (esto no importa)
- Si consideramos otro observable A con e.v. $|u_n\rangle$. La probabilidad $\mathcal{P}_1(a_n)$ de obtener el resultado a_n cuando el sistema está en el estado $|\psi_1\rangle$ es

$$|\psi_i\rangle = \sum_n \langle u_n | \psi_i \rangle |u_n\rangle \quad \begin{aligned} \mathcal{P}_1(a_n) &= |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 \\ \mathcal{P}_2(a_n) &= |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \end{aligned}$$

- Ahora, pensando en un estado normalizado formado por una superposición lineal

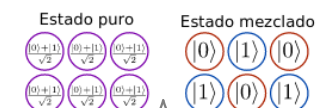
$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle \\ 1 &= |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 \end{aligned}$$

- Decimos que si el sistema está en el estado $|\psi\rangle$ entonces hay una probabilidad $|\lambda_1|^2$ de encontrarlo en el estado $|\psi_1\rangle$ y $|\lambda_2|^2$ de encontrarlo en $|\psi_2\rangle$.
- Esto nos puede llevar a pensar (equivocadamente) que un estado como $|\psi\rangle$ es una mezcla estadística. i.e. Si tenemos N copias del sistema, podríamos pensar que es equivalente que todas las copias estén en el estado $|\psi\rangle$ es equivalente a que $|\lambda_1|^2 N$ copias estén en el estado $|\psi_1\rangle$ y $|\lambda_2|^2 N$ copias estén en el estado $|\psi_2\rangle$.
- Esta afirmación es errónea y nos lleva a concluir cosas equivocadas.
- Si el estado fuera efectivamente una mezcla estadística esto nos llevaría a concluir que

$$\mathcal{P}(a_n) = |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n)$$

- Por otro lado, de acuerdo al postulado de medición

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= |\langle u_n | \psi \rangle|^2 \\ &= |\lambda_1 \langle u_n | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle u_n | \psi_2 \rangle|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^* \} \\ &= |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) + 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle^* \} \end{aligned}$$



las amplitudes
de probabilidad
interfieren.
Las fases
importan!

- Considerar al estado como mezcla estadística ignora los efectos de interferencia
- Vemos que las fases relativas entre λ_1 y λ_2 se vuelven importantes pues aparecen explícitamente en $\lambda_1 \lambda_2^*$.

¿Cómo distinguir mezcla y superposición?

Para $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\hat{N} = 0|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1|$$

Con 50% de prob obtenemos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ igual que en el caso de mezcla estadística.

Si ahora medimos $\hat{M} = a \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} \frac{(\langle 0| + \langle 1|)}{\sqrt{2}} + b \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}} \frac{(\langle 0| - \langle 1|)}{\sqrt{2}}$

Para $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$

si medimos $\hat{M}$

Siempre sale que si está en el estado $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$

Pero ¿cómo analizamos la mezcla estadística?

$$\hat{M} = a \frac{(|0\rangle + |1\rangle)}{\sqrt{2}} \frac{(\langle 0| + \langle 1|)}{\sqrt{2}} + b \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}} \frac{(\langle 0| - \langle 1|)}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2} [|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|] + \frac{b}{2} [|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|]$$

de esta forma si son claros los operadores

de esta forma no son claros los c-vectores

Para la Mezcla

$$P(a) = \left| \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(b) = \left| \left(\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$|1\rangle$

$$P(a) = \dots = \frac{1}{2}$$

$$P(b) = \dots = \frac{1}{2}$$

Sigue saliendo $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$

∴ Se puede distinguir entre un estado de superposición y una mezcla estadística midiendo en distintas bases.

Fases globales vs relativas

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle$$

Prob de obtener a_n si el sistema está en $|\psi_1\rangle$

$$P(a_n) = |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) + 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1 \lambda_2^* \langle a_n | \psi_1 \rangle \langle a_n | \psi_2 \rangle^* \}$$

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\theta_1}, \quad \lambda_2 = |\lambda_2| e^{i\theta_2}$$

$$\lambda_1 \lambda_2^* = |\lambda_1| |\lambda_2| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$\therefore \theta_1 - \theta_2$ determina la interferencia.

De la tarea 2 del Sem pasado

Ejercicio 8: Fases globales y fases relativas

Una fase es un factor $e^{i\phi}$ en una combinación lineal. Se le llama “fase global” cuando es posible factorizarla de la combinación lineal y “fase relativa” si no se puede factorizar. El objetivo de este ejercicio es resaltar que una fase global de un estado no tiene significado físico mientras que una fase relativa dentro de una superposición sí lo tiene.

- Muestra que para un observable arbitrario $\hat{A}$, su valor esperado $\langle \hat{A} \rangle$ es el mismo para los estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\varphi} |\psi\rangle$ con φ un número real.
- Considerando una base ortonormal $\{|\phi_n\rangle\}$ de eigenvectores de $\hat{A}$ con eigenvalores discretos y no degenerados $\{a_n\}$. Muestra que para un estado normalizado dado por $|\psi\rangle = \sum_n e^{i\varphi} c_n |\phi_n\rangle$ la probabilidad de obtener el resultado a_n al hacer una medición no depende de φ .
- Considera la base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, el estado $|\psi\rangle = \frac{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y los operadores $\hat{B} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$ y $\hat{C} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ y contesta las siguientes preguntas:
 - Calcula $\langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle$ y $\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle$.
 - Escribe los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{C}$ y $\hat{B}$ y usa esto para argumentar por qué $\langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle$ depende de θ mientras que $\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle$ no.

Ya no hace falta esto porque discutimos ya las fases relativas.